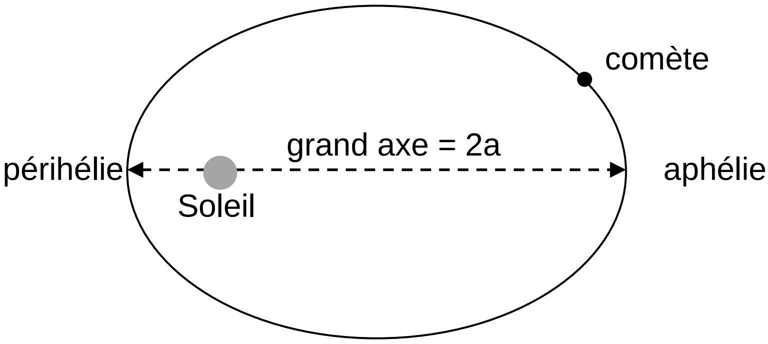
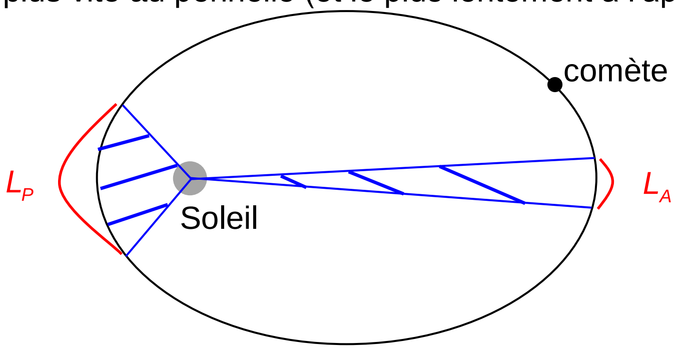
EXERCICE I – MISSION ROSETTA

1. Comète 67P Churyumov-Gerasimenko

1.1. D'après la 1ère loi de Kepler (loi des orbites), dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire de la comète est une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers. D'après l'énoncé, le périhélie est le point le plus proche du Soleil et l'aphélie, le point le plus éloigné, d'où le schéma suivant :



1.2. D'après la 2ème loi de Kepler (loi des aires), dans le référentiel héliocentrique, le segment qui relie le Soleil et la comète balaye des aires égales durant des durées égales.
La trajectoire n'étant pas un cercle, cela implique que la vitesse de la comète n'est pas constante.
Ainsi, la comète va le plus vite au périhélie (et le plus lentement à l'aphélie).



Démonstration rigoureuse : Les deux aires hachurées sont égales et balayées durant la même durée Δt mais la distance L_P parcourue autour du périhélie est plus élevée que la distance L_A parcourue autour de l'aphélie.

$v_P = \dfrac{L_P}{\Delta t}$ et $v_A = \dfrac{L_A}{\Delta t}$ Or $L_P > L_A$ donc la vitesse est plus élevée au point P.

1.3. La 3ème loi de Kepler appliquée à la Terre et à la comète donne : $\dfrac{T_{Terre}^2}{a_{Terre}^3} = \dfrac{T_{comète}^2}{a_{comète}^3} = k$

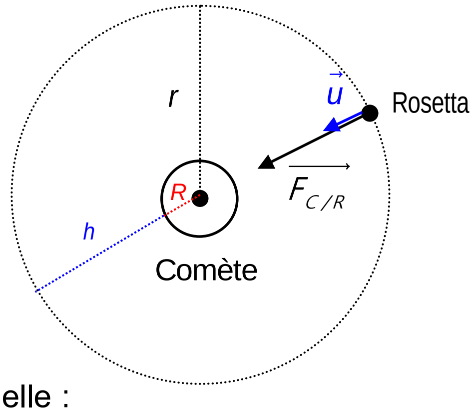
Ainsi, $T_{comète}^2 = \dfrac{T_{Terre}^2 \times a_{comète}^3}{a_{Terre}^3} \Leftrightarrow T_{comète} = \sqrt{\dfrac{T_{Terre}^2 \times a_{comète}^3}{a_{Terre}^3}}$

Pour la Terre, $T_{Terre} = 1$ an et $a_{Terre} = 1$ ua (approximation d'une orbite circulaire)

Pour la comète, d'après les données, $2a_{comète} = (1,24 + 5,68)$ ua

$$T_{comète} = \sqrt{\frac{1^2 \times \left(\dfrac{1,24+5,68}{2}\right)^3}{1^3}} = 6,44 \text{ années}$$

2. Satellisation de ROSETTA



2.1. La force exercée par la comète sur la sonde Rosetta est la force d'interaction gravitationnelle

$$\overrightarrow{F_{C/R}} = G.\frac{M_C.M}{r^2}.\vec{u} \text{ avec } r = R + h$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{F_{C/R}} = G.\frac{M_C.M}{(R+h)^2}.\vec{u}}$

2.2.1. En assimilant le poids à la force d'interaction gravitationnelle :

$\vec{P} = \overrightarrow{F_{C/R}}$ donc $M.\vec{g} = G.\frac{M_C.M}{(R+h)^2}.\vec{u}$ donc $\boxed{\vec{g} = G.\frac{M_C}{(R+h)^2}.\vec{u}}$

2.2.2. D'après la 2ème loi de Newton appliquée au système {Rosetta} dans le référentiel comètocentrique, supposé galiléen, $\sum \overrightarrow{F_{EXT}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M.\vec{a}$ car M = constante.

Donc $\overrightarrow{F_{C/R}} = M.\overrightarrow{a_R}$

Soit $G.\frac{M_C.M}{(R+h)^2}.\vec{u} = M.\overrightarrow{a_R}$ donc $\boxed{\overrightarrow{a_R} = G.\frac{M_C}{(R+h)^2}.\vec{u}}$

2.3. Vitesse et période de rotation :

2.3.1. Ainsi, le vecteur accélération de Rosetta est centripète, il n'a pas de composante tangentielle. Pour un mouvement circulaire de rayon r, cela implique que la vitesse est constante (mouvement uniforme) et que la valeur de l'accélération est $a_R = \frac{v^2}{r}$ avec $r = R + h$.

D'après 2.2.2., $a_R = \left\|\overrightarrow{a_R}\right\| = G.\frac{M_C}{(R+h)^2}$ donc $\frac{v^2}{R+h} = G.\frac{M_C}{(R+h)^2}$ donc $\boxed{v = \sqrt{\frac{G.M_C}{(R+h)}}}$

2.3.2. $v = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times1{,}0\times10^{13}}{(2{,}0+20)\times10^{3}}} = 0{,}17 \text{ m.s}^{-1}$ (Rq : c'est la valeur donnée en **3.2.**)

2.3.3. La vitesse étant constante, on peut écrire : $v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{2\pi.r}{T}$ pour un tour complet.

Ainsi $T = \frac{2\pi.r}{v} = \frac{2\pi.(\text{R}+\text{h})}{v}$

$T = \frac{2\pi\times(20+2{,}0)\times10^{3}}{0{,}17} = 7{,}9\times10^{5}\text{s}$ (9,2 jours) *valeur obtenue avec la valeur de v non arrondie*

3. Chute de PHILAE

3.1. D'après la 2ème loi de Newton appliquée au système {PHILAE} dans le référentiel comètocentrique, supposé galiléen, $\sum \overrightarrow{F_{EXT}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M_P.\vec{a}$ car M_P = constante.

Ici le système n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = M_P.\vec{g}$ donc $M_P.\vec{g} = M_P.\vec{a}$ donc $\vec{a} = \vec{g}$

En projetant sur l'axe Oy : $a_y = g_y = -g$

Par définition $\vec{a} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt}$ donc $a_y = \frac{dv_y}{dt}$; on primitive a_y pour trouver v_y :

$v_y = -g.t + C_2 = -g.t$ car d'après les conditions initiales à t = 0 , $v_{0y} = 0$

Par définition $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ donc $v_y = \frac{dy}{dt}$; on primitive v_y pour trouver y :

$y = -\frac{1}{2}.g.t^2 + C_3 = -\frac{1}{2}.g.t^2 + h$ car à t = 0, $y_0 = h$ (avec $h = 20$ km)

PHILAE touche le sol pour *y(t$_f$)* = 0 donc $0 = -\frac{1}{2}.g.t_f^2 + h \Leftrightarrow \frac{1}{2}.g.t_f^2 = h \Leftrightarrow t_f = \sqrt{\frac{2.h}{g}}$

La durée de la chute est donc $\Delta t = t_f - 0 = \sqrt{\frac{2\times 20\times 10^3}{1{,}5\times 10^{-5}}} = 5{,}2\times 10^4$s ($\approx$14 h).

La vitesse de PHILAE lorsqu'il touche le sol est $v(t_f) = -v_y(t_f) = +g.t_f$ comme établi plus haut.

Rq : en toute rigueur, $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_y^2}(ici)= -v_y$(ici car $v_y \leq 0$)

donc $v(t_f) = g.\sqrt{\frac{2.h}{g}} = \sqrt{2.g.h}$ donc $v(t_f) = \sqrt{2\times 1{,}5\times 10^{-5}\times 20\times 10^3} = 0{,}77$ m.s^{-1}

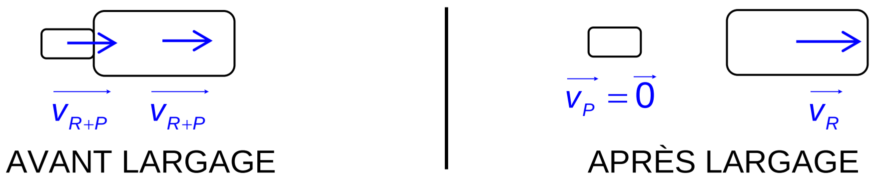
3.1.2. En appliquant la relation $v(t_f) = \sqrt{2.g.h}$ sur Terre, $v^2(t_f) = 2.g.h \Leftrightarrow h = \frac{v^2(t_f)}{2g}$

La hauteur de chute correspondante sur Terre est : $h = \frac{0{,}77^2}{2\times 9{,}8} = 0{,}031$ m soit 3,1 cm !

Cette différence s'explique par le fait que l'accélération de la pesanteur est environ 650 000 fois plus faible au voisinage de la comète ($\frac{9{,}8}{1{,}5\times 10^{-5}} = 6{,}5\times 10^5$).

3.1.3. Si la durée de chute est de 7 h contre 14 h trouvée avec le modèle utilisé, celui-ci n'est pas valide. En relisant les hypothèses faites, les erreurs peuvent être :
- considérer le champ de pesanteur comme uniforme durant les 20 km de chute (cela peut se vérifier par le calcul à l'aide de la relation de la question 2.2.2.),
- considérer que PHILAE est en chute libre (la force d'interaction gravitationnelle due au Soleil n'est peut-être pas négligeable),
- le référentiel utilisé n'est pas galiléen durant les 7 h de chute.

3.2. Faisons un schéma pour mieux comprendre la situation :



Le système {ROSETTA + PHILAE} étant isolé ($\sum \overrightarrow{F_{EXT}} = \vec{0}$) pendant la durée du largage, la 2ème loi de Newton ($\sum \overrightarrow{F_{EXT}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$) implique la conservation de la quantité de mouvement du système ($\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ donc $\vec{p} = \overrightarrow{cte}$) : $\overrightarrow{p_{AVANT}} = \overrightarrow{p_{APRES}}$

Ici : $M.\overrightarrow{v_{R+P}} = \vec{0} + (M - M_P).\overrightarrow{v_R}$

(Attention : *M* est la masse de {ROSETTA + PHILAE})

En normes, cette relation devient $M.v_{R+P} = (M - M_P).v_R$ donc $\boxed{v_R = \dfrac{M.v_{R+P}}{(M - M_P)}}$

$$v_R = \frac{3{,}0\times10^3 \times 0{,}17}{(3{,}0\times10^3 - 1{,}0\times10^2)} = 0{,}18\ \text{m.s}^{-1}$$

Rq : dans le référentiel lié à ROSETTA, l'atterrisseur PHILAE est lancé vers l'arrière avec une vitesse de 0,17 $m.s^{-1}$, ce qu'il fait qu'il est sans vitesse initiale dans le référentiel lié à la comète.
Voir vidéo "Mythbusters - Soccer Ball Shot from Truck"
https://www.youtube.com/watch?v=BLuI118nhzc

Compétences exigibles ou attendues :

En noir : officiel (Au B.O.)

En italique : officieux (au regard des sujets de bac depuis 2013)

☐ Connaître les 3 lois de Kepler.

☐ Exploiter la 3ème loi de Kepler.

☐ *Connaître l'expression vectorielle de la force d'interaction gravitationnelle (avec un vecteur unitaire à rajouter sur un schéma).*

☐ Identifier localement le champ de pesanteur au champ de gravitation en 1ère approximation (1ère S).

☐ Démontrer que, dans l'approximation des trajectoires circulaires, le mouvement d'un satellite, d'une planète, est uniforme. Établir l'expression de sa vitesse et de sa période.

☐ Connaître et exploiter les trois lois de Newton ; les mettre en œuvre pour étudier des mouvements dans des champs de pesanteur et électrostatique uniformes.

☐ *Utiliser la 2ème loi de Newton pour faire l'étude mécanique du mouvement d'un point matériel :- détermination des équations horaires du mouvement ($a_x(t)$, $a_y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$, $x(t)$, $y(t)$)*

- détermination de l'équation de la trajectoire ($y(x)$)

☐ *Exploiter les équations horaires du mouvement ou l'équation de la trajectoire pour répondre à un problème donné (ex : portée d'un tir, durée d'une chute, vitesse en un point …).*

☐ Définir la quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un point matériel.

☐ Mettre en œuvre une démarche expérimentale pour interpréter un mode de propulsion par réaction à l'aide d'un bilan qualitatif de quantité de mouvement.

☐ *Calculer une vitesse à l'aide d'un bilan quantitatif de quantité de mouvement (pour un système isolé ou pseudo-isolé).*