

MUSIQUE ET NOMBRES

1 Les intervalles en musique

En musique, l'**intervalle** entre deux sons correspond au rapport de leurs fréquences fondamentales.

L'écoute de différents intervalles musicaux provoque des sensations plus ou moins agréables. Les sons consonants (qui « sonnent » bien), sont liés à des rapports simples d'entiers (Fig. 1). Ils ont alors des harmoniques communs.

Exemple : Quand on presse la corde d'un monocorde aux deux tiers, le son produit par le plus grand morceau de corde « sonne bien » avec le son fourni par la corde entière.

Deux notes séparées par une **octave** correspondent à une même note, à des hauteurs différentes.

Nom de l'intervalle	Rapport de fréquences
Unisson	1/1
Octave	2/1
Quinte	3/2
Quarte	4/3

Fig. 1 : Intervalles consonants.

2 Les gammes de Pythagore

Pour construire une **gamme** (c'est-à-dire une suite finie de **notes** réparties sur une octave), les disciples de Pythagore ont exploité uniquement les intervalles qu'ils jugeaient les plus consonants, c'est-à-dire l'octave et la **quinte**.

Les gammes dites de Pythagore sont créées par une succession de quintes [caractérisées par une multiplication de la fréquence par 3/2] et de réductions à l'octave [caractérisées par une division de la fréquence par 2].

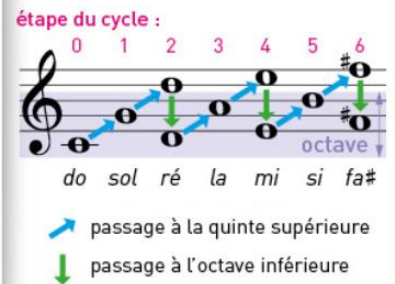


Fig. 2 : Principe du cycle des quintes.

Construction d'une gamme avec le cycle des quintes

- On construit la gamme à partir d'un son de fréquence f .
- On multiplie cette fréquence par 3/2 pour former une première quinte.
- On trouve la quinte suivante en multipliant la fréquence de la note précédente par 3/2. Si la fréquence obtenue n'est plus dans l'intervalle $[f; 2f]$, on la « ramène » dans l'octave en la divisant par 2 (Fig. 2). On obtient ainsi une nouvelle note.
- On continue ce procédé jusqu'à obtenir n notes réparties dans l'octave.

Gammes à 7 et 12 notes

Un raisonnement mathématique montre qu'il n'existe aucune suite de notes construites sur le cycle des quintes qui « reboucle » exactement.

En effet, en sautant de quinte en quinte, on ne retombe jamais exactement sur un nombre entier d'octaves. On doit ainsi légèrement tronquer la fréquence de la dernière note obtenue par les quintes pour la faire tomber exactement sur l'octave de la note de départ de la gamme et refermer le cycle sur lui-même. Le dernier intervalle n'est alors pas une quinte pure et il sonne faux (quinte du loup). (Fig. 3).

Cependant, le cycle reboucle presque pour un nombre de notes égal à 7 et 12. Ainsi, les musiciens ont longtemps utilisé des gammes à 7 et 12 notes (Fig. 4).

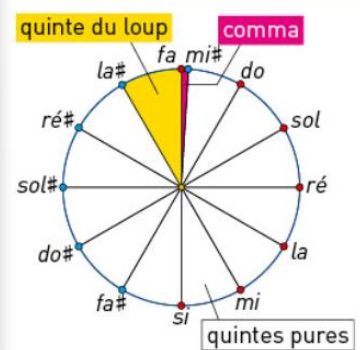


Fig. 3 : La quinte du loup.

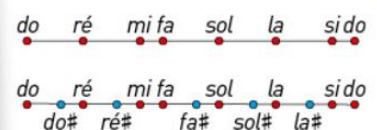


Fig. 4 : Les gammes à 7 et 12 notes.

3 Les gammes au « tempérament égal »

Le problème de transposition

Une **transposition** consiste à adapter une mélodie au registre de la voix ou d'un instrument en la « déplaçant » vers l'aigu ou le grave.

Les gammes de Pythagore ne facilitent pas la transposition, car les intervalles entre les différentes notes de la gamme sont inégaux (Fig. 5).

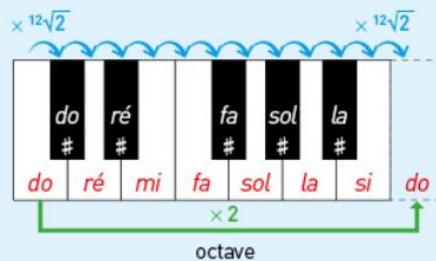
C'est pour cela qu'on a évolué vers la gamme tempérée, qui partage l'octave en 12 intervalles identiques – les demi-tons.

La gamme tempérée

Le modèle qui s'impose à partir du XVIII^e siècle est le tempérament égal, qui permet de transposer une mélodie dans toutes les tonalités sans la déformer.

La gamme tempérée à 12 notes est une gamme dont tous les intervalles sont égaux. L'intervalle d entre deux notes successives de la gamme est égal à la racine douzième de 2 :

$$d = \sqrt[12]{2} \approx 1,05946.$$



L'oreille humaine tolère bien le tempérament égal même si aucun intervalle, sauf l'octave, n'est dans un rapport simple.



Fig. 5 : Deux intervalles, notés A et C, séparent les notes de la gamme de Pythagore

RESUME EN IMAGES : [video](#)