Correction de l'activité 6.3

Q1) Qu'est-ce que la « quinte du loup » ? Quelle est son origine ?

C'est une quinte qui n'est pas tout à fait juste : elle correspond à un rapport de fréquences égale à 1,48 (et non 1,5). Il s'ensuit que des notes jouées avec un tel intervalle ne sont pas consonnantes (impression de hurlement du loup). Elle est dû au fait que le cycle des quintes ne boucle pas (on ne retombe jamais sur une note dont la fréquence est un multiple entier de la première).

Q2) Si le cycle des quintes était fini, il existerait un nombre n de quintes successives qui donnerait la même note qu'un nombre p d'octaves successives. Montrer en raisonnement par l'absurde que le cycle des quinte est infini.

Si le cycle des quintes était fini, il existerait un nombre n de quintes successives qui donnerait la même note qu'un nombre p d'octaves successives. On aurait alors, en partant d'une note de fréquence f_0 : $f_0 \times (\frac{3}{2})^n = f_0 \times 2^p$

$\Leftrightarrow (\frac{3}{2})^n = 2^p$

$\Leftrightarrow 3^n = 2^{p+n}$

Sachant que 2^{n+p} est forcément un nombre pair et que 3^n est forcément un nombre impair, alors cette égalité est impossible. On en déduit que le cycle des quintes n'est pas fini, il est infini.

Q3) En raisonnement à nouveau par l'absurde, montrer que les gammes de Pythagore ne « rebouclent » pas.

<u>Aide :</u> On suppose qu'il existe un nombre entier n de quintes et un nombre entier p de réductions à l'octave tel que la fréquence f_n de la $n^{ème}$ note de la gamme soit égale au double de la fréquence f_0 de la note de départ.

Si la gamme « reboucle », alors il existe un nombre entier n de quintes et un nombre entier p de réductions à l'octave tel que : $f_n = 2 \times f_0$

$\Leftrightarrow f_0 \times (\frac{3}{2})^n \times (\frac{1}{2})^p = 2 \times f_0$

$\Leftrightarrow (\frac{3}{2})^n \times (\frac{1}{2})^p = 2$

$\Leftrightarrow 3^n = 2^{n+p+1}$

Sachant que 2^{n+p+1} est forcément un nombre pair et que 3^n est forcément un nombre impair, alors cette égalité est impossible. On en déduit qu'il n'existe pas dans une gamme de Pythagore de note dont la fréquence soit égale au double de la fréquence de la $1^{ère}$ note : les gammes de Pythagore ne « rebouclent » pas et il existe toujours un « coma ».

Q4) À quelle époque est apparue la gamme tempérée ? Quelle est sa particularité ?

La gamme tempérée est apparue à la fin du XVIe siècle. Elle propose de découper l'octave en 12 intervalles égaux.

Q5) À Quelle est la valeur du rapport de fréquence r entre deux notes de la gamme tempérée ?
Sachant que ce rapport est appelé demi-ton, en déduire la valeur du rapport de fréquence d'un ton.

Rapport de fréquence entre deux notes de la gamme tempérée (demi-ton) : $r = 2^{1/12} = 1{,}06$.
Le rapport d'un ton sera donc rton = $r \times r = 2^{2/12} = 1{,}12$.

Q6) La gamme de Pythagore et la gamme tempérée sont-elles construites à partir des mêmes types de nombre ?

Non : la gamme de Pythagore utilise des nombres rationnels (fractions de nombres entiers) alors que la gamme tempérée utilise des nombres irrationnels (ils ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions de nombres entiers).

Q7) Dans la gamme tempérée, la hauteur du La_3 (La de la troisième octave) est fixée à 440,0 Hz et sert de référence. Calculer les fréquences des deux notes suivantes et précédentes et compléter le tableau ci-dessous :

La note La♯ est un demi-ton au dessus du La : f(La♯)= $2^{1/12} \times$ f(La) = $2^{1/12} \times 440{,}0 = 466{,}2$ Hz

La note Si est deux demi-tons au dessus du La : f(Si) = $2^{2/12} \times$ f(La) = $2^{2/12} \times 440{,}0 = 493{,}9$ Hz

La note Sol♯ est un demi-ton au dessous du La : f(Sol♯) = f(La) / $2^{1/12} = 440{,}0 / 2^{1/12} = 415{,}3$ Hz

La note Sol est deux demi-tons au dessous du La : f(Sol) = f(La) / $2^{2/12} = 440{,}0 / 2^{2/12} = 392{,}0$ Hz

Note	Do	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do
Fréquence (Hz)	261,6	277,2	293,7	311,1	329,6	349,2	370	392,0	415,3	440,0	466,2	493,9	523,2

Q8) Montrer que les deux Do du tableau (do3 et do4) sont séparés d'une octave.

$f(Do_4) / f(Do_3) = 523{,}2 / 261{,}6 = 2$ => ces deux Do sont séparés d'une octave

Q9) Lors d'une transposition, la tonalité d'un morceau de musique est augmentée de deux tons et demi. Par quelle note le Do est-il alors remplacé ?

Deux tons et demi correspondent à demi-tons donc le Do est remplacé par un Fa.

Q10) En quoi la gamme tempérée (gamme à intervalles égaux) est-elle plus pratique pour les musiciens ?

Quand on décale les notes de la gamme tempérée d'un nombre entier de demi-tons, on retombe toujours sur des notes existantes (on peut donc transposer un morceau), ce qui n'est pas le cas avec la gamme de Pythagore.

SYNTHESE PROF :

Jusqu'au XVIIe siècle, les musiciens ont utilisé la gamme chromatique, ou de Pythagore, pour accorder les instruments et composer la musique. La construction de cette gamme est basée sur l'utilisation de deux intervalles consonants : l'octave et la quinte, de rapports respectivement 2/1 et 3/2. Cette construction, basée sur les nombres rationnels, permet de garantir des intervalles consonants parfaitement justes (octaves, quartes, quintes), mais se heurte à un problème : en sautant de quinte en quinte, on ne retombe jamais exactement sur un nombre entier d'octaves. Autrement dit, on doit arbitrairement choisir de légèrement tronquer (ou augmenter) la fréquence de la dernière note obtenue par les quintes pour la faire tomber exactement sur l'octave de la note de départ de la gamme et ainsi obtenir une gamme avec un nombre fini de notes et refermer le cycle des quintes sur lui-même. Ce faisant, on crée un dernier intervalle qui sonne faux : c'est la quinte du loup, qui était présente sur les instruments et rendait artificiellement inégales les différentes gammes, donc compliquait les transpositions de morceaux et la composition musicale en général. C'est pour cela qu'on a évolué vers la gamme tempérée, qui partage l'octave en 12 intervalles identiques – les demi-tons. Mais pour ce faire, il a fallu accepter que ce petit intervalle ait un rapport irrationnel. Ainsi, toutes les gammes se valent, mais les intervalles sont très légèrement faux : ils ne correspondent plus exactement à des fractions.