

# MODÉLISATION GRAPHIQUE POUR OPTIMISER UN RÉSEAU

La distribution d'énergie électrique le long d'un réseau nécessite d'optimiser son acheminement afin de minimiser les pertes par effet Joule. La théorie des graphes permet de représenter une structure complexe et ses connexions afin de résoudre ce type de problème sous contraintes. Comment optimiser un réseau électrique modélisé par un graphe orienté ?

## 3

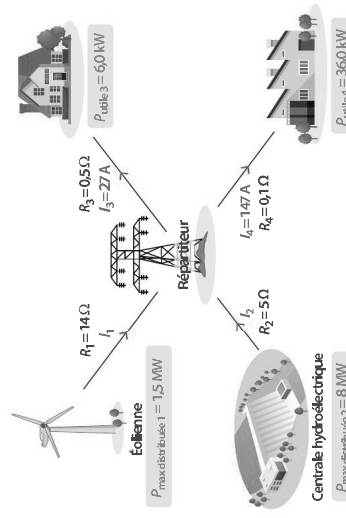
**OBJECTIF**  
Modéliser un réseau électrique pour optimiser sa distribution

### 1 Modélisation d'un réseau de distribution électrique simple

- Pour étudier l'optimisation du fonctionnement du réseau électrique, il peut être simplifié, comme dans l'exemple ci-contre.
- Une éolienne et une centrale hydroélectrique alimentent le réseau avec des puissances électriques maximales différentes ( $P_{\max, \text{éolienne}}$ ) et des intensités  $I_1$  et  $I_2$  ajustables.
- Deux usagers, aux besoins différents ( $P_{\text{utilisateur}}$ ), reçoivent des intensités différentes  $I_3$  et  $I_4$  connues et fixées.
- La distribution se fait par quatre câbles de résistances différentes connues ( $R_1, R_2, R_3$  et  $R_4$ ) parcourus respectivement par des intensités  $I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$ .
- Un répartiteur permet d'ajuster productions et besoins en tenant compte des pertes par effet Joule le long des différents câbles.

### MATHS

1 kW = 1 000 W =  $10^3$  W  
1 MW = 1 000 000 W =  $10^6$  W



Les puissances distribuées par les centrales varient selon la technologie utilisée (nucléaire, thermique, solaire etc.). Elles dépendent aussi du niveau de fonctionnement des centrales.

Les puissances utiles, dépendent de l'abonnement souscrit par l'utilisateur. Ces puissances sont souvent exprimées en kVA (kilovoltampère) : 1 kVA = 1 kW.

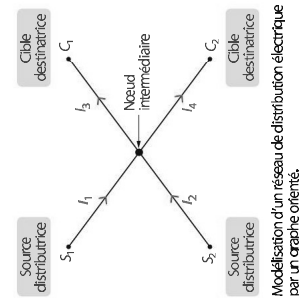
### 2 Modélisation par un graphe orienté

Un graphe orienté permet de modéliser mathématiquement un réseau électrique simplifié.

Le réseau du document 1 est modélisé par un ensemble de points :

- deux sources distributrices  $S_1$  et  $S_2$  ;
- deux cibles destinataires  $C_1$  et  $C_2$  ;
- un nœud intermédiaire.

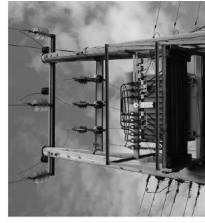
Ces points sont reliés par des segments orientés appelés arcs.



Modélisation d'un réseau de distribution électrique par un graphe orienté.

### POUR INFO

Un répartiteur agit comme un véritable « carrefour ». Plusieurs lignes y arrivent et en repartent afin de répartir l'énergie électrique selon les productions et les besoins des usagers.



### 3 Les trois contraintes du réseau modélisé

#### a. Contrainte sur les intensités sortant des sources

L'intensité délivrée par chaque source distributrice dépend de la puissance qu'elle distribue, les pertes par effet Joule étant limitées à environ 6 %.

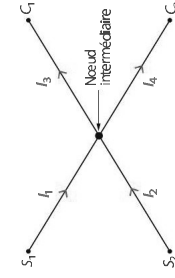
Pour l'arc 1 :  $P_{S_1} \leq \frac{6}{100} \times P_{\max, \text{éolienne}}$   
 $P_{S_1} \leq \frac{6}{100} \times 1\,500\,000$   
 soit  $P_{S_1} \leq 90\,000$  W.

Comme  $P_{S_1} = R_1 \times I_1^2$ , avec  $R_1 = 14 \Omega$ , on a :  $\sqrt{\frac{90\,000}{R_1}}$ , or  $\sqrt{\frac{90\,000}{14}} \approx 80$  A  
 $I_1 \leq 80$  A  
 De même, pour l'arc 2 :  $I_2 \leq 310$  A.

#### b. Contrainte sur les intensités au nœud intermédiaire

L'intensité du courant qui alimente chaque cible destinataire est imposée par la puissance qu'il est utilisée. Les pertes par effet Joule sur cette partie du réseau correspondent à environ 6 % de la puissance utilisée.

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$



#### c. Contrainte sur les intensités arrivant aux cibles

L'intensité du courant qui alimente chaque cible destinataire est imposée par la puissance qu'il est utilisée. Les pertes par effet Joule sur cette partie du réseau correspondent à environ 6 % de la puissance utilisée.

Pour l'arc 3 :  $P_{S_3} = \frac{6}{100} \times P_{\text{cible 3}}$   
 $P_{S_3} = \frac{6}{100} \times 60\,000 = 3600$  W  
 Comme  $P_{S_3} = R_3 \times I_3^2$ , avec  $R_3 = 0,5 \Omega$ , on a :  $\sqrt{\frac{3600}{R_3}} \approx 27$  A.  
 $I_3 = \sqrt{\frac{3600}{0,5}} \approx 27$  A.  
 De même, pour l'arc 4 :  $I_4 \approx 147$  A.

### 4 Minimisation des pertes par effet Joule à l'aide d'une fonction objectif

Optimiser l'acheminement de l'énergie électrique revient à minimiser les pertes par effet Joule.

Pour cela, on définit et étudie une fonction objectif :

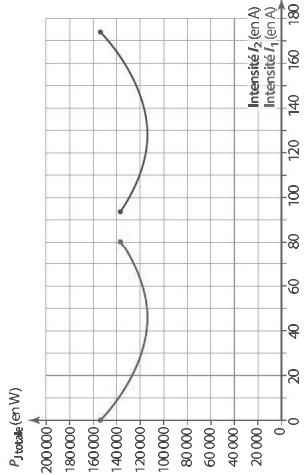
$$P_{\text{totale}} = P_{S_1} + P_{S_2} + P_{S_3} + P_{S_4}$$

Les intensités  $I_3$  et  $I_4$  étant constantes,  $P_{\text{totale}}$  se simplifie en fonction des variables  $I_1$  et  $I_2$ .

L'étude des variations graphiques ou algébriques de  $P_{\text{totale}}$  permet de déterminer les valeurs de  $I_1$  et de  $I_2$  qui minimisent les pertes.

FOCUS MATHS p. 156

Représentations graphiques de  $P_{\text{totale}}$  en fonction de  $I_1$  et de  $I_2$ .



### QUESTIONS

1 À partir de la contrainte sur les intensités arrivant aux cibles (doc. 3c), vérifier que, pour l'arc 4,  $P_{S_4} = 2\,160$  W et en déduire que  $I_4$  est environ égale à 147 A.

2 À partir de la contrainte sur le nœud intermédiaire (doc. 3b), montrer que  $I_1 + I_2 = 174$  A. Justifier alors que  $I_2$  peut prendre une valeur en ampère comprise dans l'intervalle [94 ; 174].

3 Écrire l'expression de la fonction objectif (doc. 4)  $P_{\text{totale}}$  en fonction de  $I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$ .

### 4 En déduire que :

$$P_{\text{totale}} = 14 \times I_1^2 + 5 \times (174 - I_1)^2 + 2\,520$$

ou  $P_{\text{totale}} = 14 \times (174 - I_2)^2 + 5 \times I_2^2 + 2\,520$ .

5 Par lecture graphique (doc. 4), déterminer la valeur minimale de  $P_{\text{totale}}$ , ainsi que les valeurs des intensités  $I_1$  et  $I_2$  correspondantes. Vérifier que les trois contraintes (doc. 3) sont bien respectées.

➤ Pour approfondir : ex. 20 et 22 p. 161